

種々の境界条件をもつ矩形板の非弾性曲げ解析

松 田 浩* 崎 山 毅*
秋 友 隆 二**Elasto-Plastic Bending Analysis of Rectangular Plates
with Variable Boundary Conditions

by

Hiroschi MATSUDA, Takeshi SAKIYAMA and Ryuji AKITOMO

In this paper, an approximate method for analyzing the problems of elasto-plastic bending of a rectangular plate is proposed. The solutions of the partial differential equation of the rectangular plate are obtained in discrete forms by applying numerical integration, and they give the transverse shear forces, twisting moment, bending moments, rotations and deflection at all discrete points.

An incremental procedure has been used for the elasto-plastic analysis of the plate. As the applications of the present method, the rectangular plates with the various boundary conditions are calculated.

1. 序 言

矩形板の非弾性曲げ問題に関しては、Hodge ら¹⁾によって塑性関節線を用いた崩壊形式および崩壊荷重を求める塑性設計法が提示されている。しかしながら、この方法は、コンクリートなどの脆性材料には適用できるが、延性材料には膜応力の影響が無視できなくなるため、適用が困難になるといわれている²⁾。

一方、矩形板の初期降伏後の弾塑性挙動は、有限要素法、Discrete Element Method および差分法などの離散化数値解析法によって解析されている。

有限要素法による板の弾塑性解析の方法には、例えば、堀田³⁾による塑性関節線を用いる方法、また、小松、北田、宮崎⁴⁾による板厚方向の塑性域の拡りを考慮する方法などがある。また、大賀、重松、原⁵⁾は、Finite Element-transfermatrix Method を用いて大たわみ弾塑性解析を行っている。さらに、Owen⁶⁾らは、厚板にも適用できる Mindlin 理論に基づいて矩形板の非弾性解析を行っている。

Ang, Lopez⁷⁾は、deformable nodes, rigid bars, torsional element からなる力学モデルを使った、いわゆる Discrete-variable approach を用いて矩形板の非弾性曲げ解析を行っている。

差分法による矩形板の非弾性問題に関する研究は、Bhaumik, Hanley⁸⁾により四辺単純支持および四辺固定なる境界条件を有する正方形板の弾塑性解析がなされ、また、横尾、中村、森⁹⁾により四辺単純支持長方形板について解析されている。さらに May¹⁰⁾らは、四辺単純支持および四辺固定なる正方形板の弾塑性解析を行ない、実験結果および Ang, Bhaumik の解析結果と比較を行ない提示した解法の実用性を明らかにしている。

本論文は、以上に述べた降伏後の弾塑性挙動を解析する方法のほかに、先に提示した矩形板の曲げ解法¹²⁾の、非弾性曲げ解析への応用性について検討したものである。数値解析例として、四辺単純支持、四辺固定、対辺単純支持他対辺固定、対辺単純支持他対辺自由な

昭和62年 4月30日受理

*構造工学科 (Department of Structural Engineering)

**山口県庁 (Yamaguchi Prefectural Office)

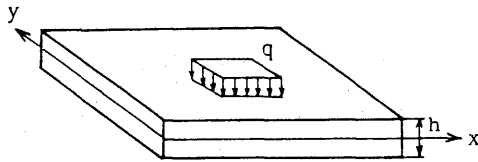


Fig. 1 Rectangular Plate and Co-ordinate System.

る境界条件を有する矩形板の弾塑性解析を行い、その挙動特性を明らかにした。

2. 増分基礎微分方程式

矩形板のせん断力を Q_y , Q_x , ねじりモーメントを M_{xy} , 曲げモーメントを M_y , M_x , たわみ角を θ_y , θ_x , たわみを w とすれば, 多軸応力状態にある矩形板の塑性状態における応力とひずみの関係式(文献¹¹⁾)に基づいて, せん断変形の影響を考慮した Mindlin 矩形板 (Fig. 1) の弾塑性挙動を支配する基礎微分方程式は, 次の増分形式の変数係数の連立偏微分方程式で表わされる。

$$\frac{\partial \Delta Q_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (1. a)$$

$$\frac{\partial \Delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial y} - \Delta Q_x = 0 \quad (1. b)$$

$$\frac{\partial \Delta M_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial x} - \Delta Q_y = 0 \quad (1. c)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} = \frac{1}{D} (b_{11} \Delta M_x + b_{12} \Delta M_y + b_{13} \Delta M_{xy}) \quad (1. d)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} = \frac{1}{D} (b_{21} \Delta M_x + b_{22} \Delta M_y + b_{23} \Delta M_{xy}) \quad (1. e)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} = \frac{1}{D} (b_{31} \Delta M_x + b_{32} \Delta M_y + b_{33} \Delta M_{xy}) \quad (1. f)$$

$$\frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta \theta_x = \frac{\Delta Q_x}{x G h} \quad (1. g)$$

$$\frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta \theta_y = \frac{\Delta Q_y}{x G h} \quad (1. h)$$

ここに, $q = q(x, y)$: 横荷重強度, E : 弾性係数

$G = E/2(1+\nu)$: せん断弾性係数,

ν : ポアソン比, $h = h(x, y)$: 板厚

$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$: 板剛度,

$\kappa = 5/6$: せん断修正係数,

Δ : 荷重増分 Δq に対する各断面力および変形量の増分, b_{ij} : APPENDIX I

次の無次元化された式を用いると,

$$X_1 = a^2 Q_y / [D_0(1-\nu^2)], \quad X_2 = a^2 Q_x / [D_0(1-\nu^2)]$$

$$X_3 = a M_{xy} / [D_0(1-\nu^2)], \quad X_4 = a M_y / [D_0(1-\nu^2)]$$

$$X_5 = a M_x / [D_0(1-\nu^2)], \quad X_6 = \theta_y, \quad X_7 = \theta_x$$

$$X_8 = w/a, \quad \eta = x/a, \quad \zeta = y/b,$$

式(1. a)~(1. h)は, 次式のように簡単に書き換え

られる。

$$\sum_{s=1}^8 \left[F_{1ts} \frac{\partial \Delta X_s}{\partial \zeta} + F_{2ts} \frac{\partial \Delta X_s}{\partial \eta} + F_{3ts} \Delta X_s \right] + \delta_{1t} \Delta \bar{q} = 0 \quad (2)$$

ここに, δ_{ij} : Kronecker's delta, $t=1, 2, \dots, 8$

F_{kts} : APPENDIX II, q_0 : 基準荷重強度

a, b : 矩形板の縦横の辺長

h_0 : 基準板厚, $q = q(x, y) = \mu k_1 q(x, y)/q_0$

$k_1 = q_0 a^3 / [D_0(1-\nu^2)]$, $K = E h_0^3 / (12 \kappa G h)$

$I = I(x, y) = \mu(1-\nu^2)(h_0/h)^3$

$D_0 = E h_0^3 / [12(1-\nu^2)]$: 基準板剛度

式(2)を用いて, 矩形板の非弾性曲げ解析を行うことができる。

3. 基礎微分方程式の離散的近似解

基礎微分方程式(2)の矩形板の縦横の等分割線の交点に関する離散的近似解は, 次式のように整理される。

$$\Delta X_{pij} = \sum_{k=0}^i \left(\sum_{l=0}^j a_{pijkl} \Delta X_{rko} + \sum_{l=0}^j b_{pijkl} \Delta X_{sol} \right) + \Delta q_{pij} \quad (3)$$

$a_{pijkl}, b_{pijkl}, q_{pij}$: Appendix III, IV

この解式に含まれる境界従属点の6個ずつの諸量 ΔX_{rko} , ΔX_{sol} は, いわゆる積分定数であり, 境界条件によって決定されるべきものである。また, 任意の領域 (i, j) の主要点における諸量 ΔX_{pij} を, この領域の境界従属点における諸量 ΔX_{rko} , ΔX_{sol} に関係づける要素 a_{pijkl} および b_{pijkl} は, 伝達マトリックス法におけるいわゆる伝達マトリックスに相当するものである。なお, 離散的近似解の導出過程の詳細は, 文献¹²⁾を参

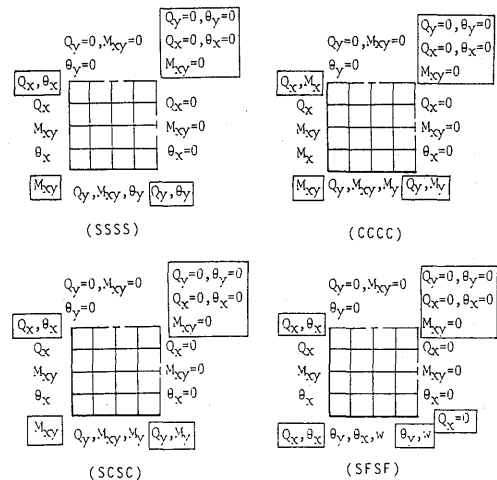


Fig. 2 Integral Constants and Boundary Conditions.

照されたい。

4. 積分定数と境界条件

基礎微分方程式(1. a)～(1. h)の近似解(3)に含まれる積分定数 ΔX_{rho} , ΔX_{sof} は、具体的には、それぞれ、平板の $y=0$, $x=0$ なる辺上における断面力および変形を表わす。各等分割点において6個ずつの積分定数が存在するが、平板の境界辺の支持条件に応じて、これらの中のいずれか3個の積分定数は、はじめから既知である。残りの3個の未知なる積分定数は、 $x=a$, $y=b$ の各辺の境界条件によって決定される。

Fig. 2(1)～(4)に、各々、四辺単純支持板、四辺固定板、対辺単純支持他対辺固定板、対辺単純支持他対辺自由板の左右および上下の2軸対称性をもつ平板の1/4部分を対象とした積分定数と境界条件を示している。各図において、隅角点における積分定数および境界条件は、 \square で囲まれている。なお、隅角点における積分定数および境界条件は、その隅角点において交差する2境界辺上での諸量間の関係を考慮して定められる。詳しくは、文献(12)を参照されたい。

5. 数値計算手法

矩形板の非弾性曲げ問題は、荷重の漸増に伴い、部材断面に塑性域が生じるために、応力一ひずみ関係式が変化するので、結局、増分形の変数係数の連立偏微分方程式の解を求める問題に帰着される。本文で得られた弾塑性状態での増分形基礎微分方程式の離散的近似解を用いると、荷重増分法により、矩形板の非弾性解析を行うことができる。

本文での矩形板の非弾性曲げ解析における仮定は、次のとおりである。

- (1) 矩形板は、非硬化性材料からなる。
- (2) 部材断面に降伏域が生じた後も Mindlin の理論が成り立つ。
- (3) 変形は、板厚に比して小さい。したがって、幾

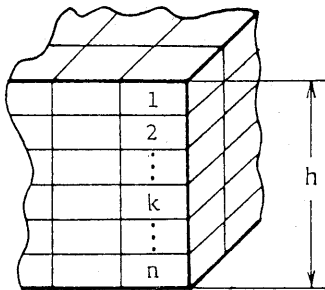


Fig. 3 Subdivision of Cross Section into Layers.

何学的非線形性は考慮しない。

- (4) 材料は、von-Mises の降伏条件式(4)に従う。

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \quad (4)$$

σ_0 : 降伏応力

いま、第 n 荷重段階で矩形板の断面の一部が弾塑性状態にあるとするなら、増分形微分方程式における変数係数 $b_{ij}(i=j=3)$ は、次の計算手順によって求めることができる。

[データ] 第 $(n-1)$ 荷重段階における無次元応力

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_0} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Delta \sigma_x}{\sigma_0}, \quad \frac{\sigma_y}{\sigma_0} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Delta \sigma_y}{\sigma_0}, \quad \frac{\tau_{xy}}{\sigma_0} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Delta \tau_{xy}}{\sigma_0}$$

- (a) 矩形板の断面を板厚方向に多層分割する。(Fig. 3 参照)
- (b) 第 $(n-1)$ 荷重段階における無次元応力を用いて、すべての離散点における断面のすべての要素について、偏差応力 σ'_x , σ'_y , τ'_{xy} を計算する。
- (c) 変数係数 b_{ij} の計算 (APPENDIX I)
- (d) 増分形微分方程式を解く。

$\rightarrow \Delta M_x, \Delta M_y, \Delta M_{xy}$ の算定。

- (e) 第 n 荷重段階における無次元増分応力の算定。

$$\Delta \sigma_x / \sigma_0, \Delta \sigma_y / \sigma_0, \Delta \tau_{xy} / \sigma_0$$

- (f) 第 n 荷重段階における無次元応力の算定。

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_0} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta \sigma_x}{\sigma_0}, \quad \frac{\sigma_y}{\sigma_0} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta \sigma_y}{\sigma_0}, \quad \frac{\tau_{xy}}{\sigma_0} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta \tau_{xy}}{\sigma_0}$$

以上の(a)～(f)の計算を増分荷重下で繰り返して行う。

6. 数値解析結果

- (1) 四辺単純支持正方形板

はじめに、四辺単純支持 (SSSS) なる境界をもつ正方形板に等分布荷重が満載される場合の非弾性解析を行った。

Fig. 4 は、分割数 $m=n=4$, 板厚方向の分割数 $nz=20$ のとき、増分荷重 $\Delta q a^2 / M_p$ を変化した場合の中央点のたわみに関する荷重～変位曲線を示す。○印で示された値は、Bhaumik, Hanley⁶⁾により差分法を用いて得られた結果、および、□印で示された値は、Owen, Hinton⁶⁾により有限要素法 (“Heterosis” finite element.)を用いた結果を示しており、本解析法による数値解析結果は、これら他の解法による数値結果と比較的よく一致していることがわかる。また、塑性設計法により得られる崩壊荷重値 (upper and lower bound = $24.0 q a^2 / M_p$) も示されており、この値にも、本法による数値解はよく一致している。Fig. 5 に降伏開始後から断面の一部が全塑性モーメントに達するまでの代表的な荷重段階での、 $y=0$ 上のねじりモーメント M_{xy} および $y=b/2$ 上の曲げモーメント M_y, M_x の

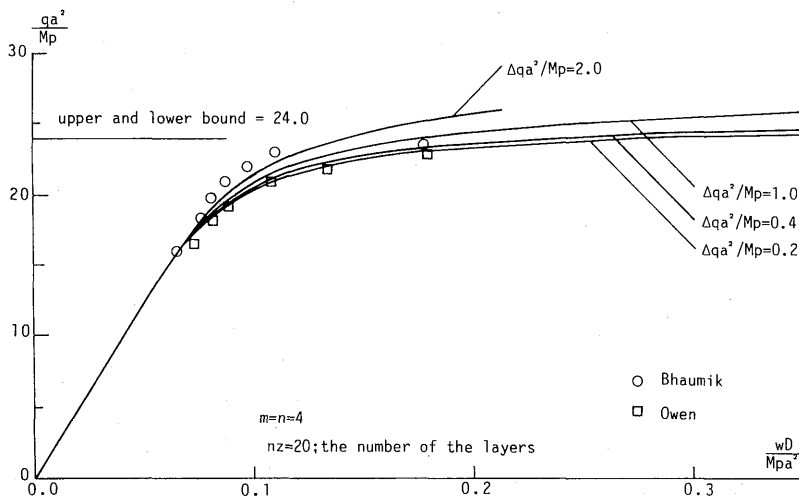


Fig. 4 Load-Deflection Curves for Simply Supported Square Plate.

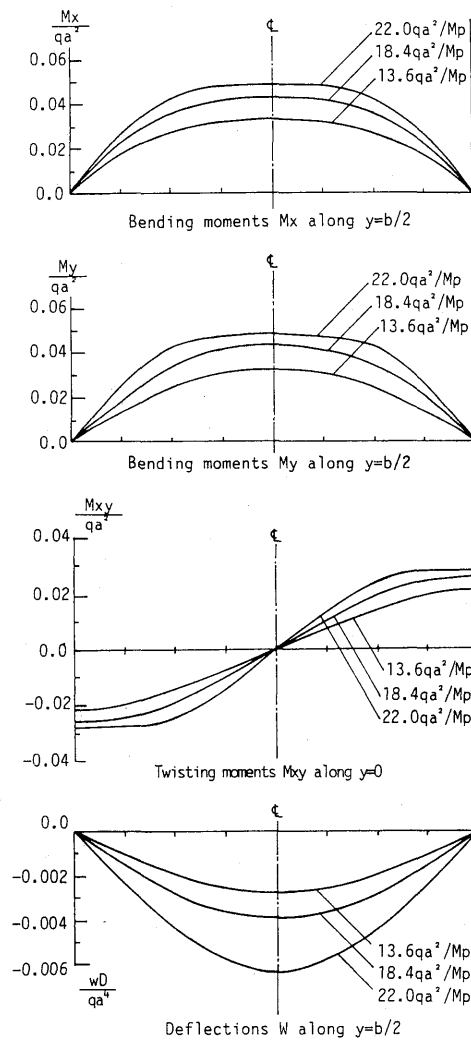


Fig. 5 Typical Moment and Deflection Diagrams for Simply Supported Square Plate.

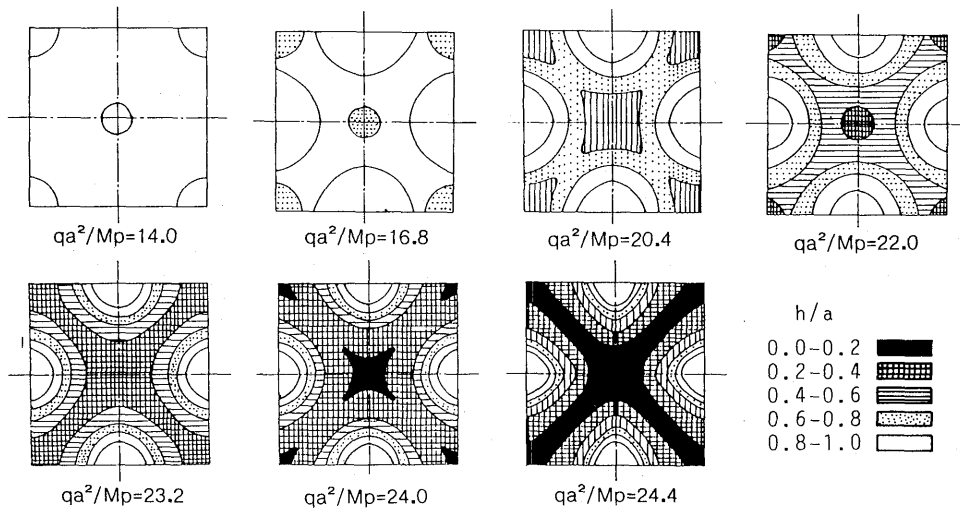


Fig. 6 Progression of Yield Regions (SSSS).

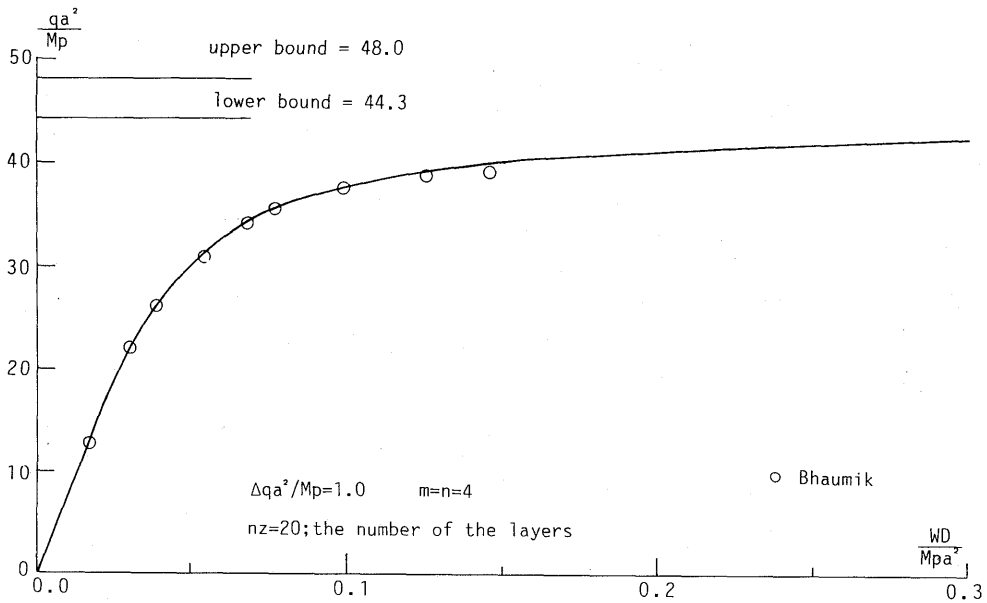


Fig. 7 Load-Deflection Curves for Clamped Square Plate.

分布図を示したものである。同図より、ねじりモーメント M_{xy} および曲げモーメント M_y, M_x の分布は、塑性化が進むにつれて平滑化されていることがわかる。これは、弾性範囲を超え塑性化した部分はもはや外力に対して抵抗せず、その近隣部分が増分荷重に対して抵抗するためであると考えられる。Ang, Lopez⁷⁾による計算結果においても同様の傾向を示している。Fig. 6は正方形板の4分の1部分を縦横にそれぞれ4等分して計算した場合の代表的な荷重段階での弾塑性状況図を示す。同図で、色分けの区分は、塑性化する前の

板厚 h_0 を基準とし、塑性化した断面を取り除いた弾性部分の深さ h との比 h/h_0 で表わし、同図中に示す色分け区分で表わしている。四辺単純支持正方形板においては、塑性域はまず隅角点から拡がり、つづいて中央点からも拡がり、対角線上に進行していく。この結果は、横尾、中村、森⁹⁾による差分法およびAng, Lopez⁷⁾の Discrete Model Analysis による計算結果と同様の傾向を示している。

(2) 四辺固定正方形板

つづいて、四辺固定 (CCCC) なる境界をもつ正方形

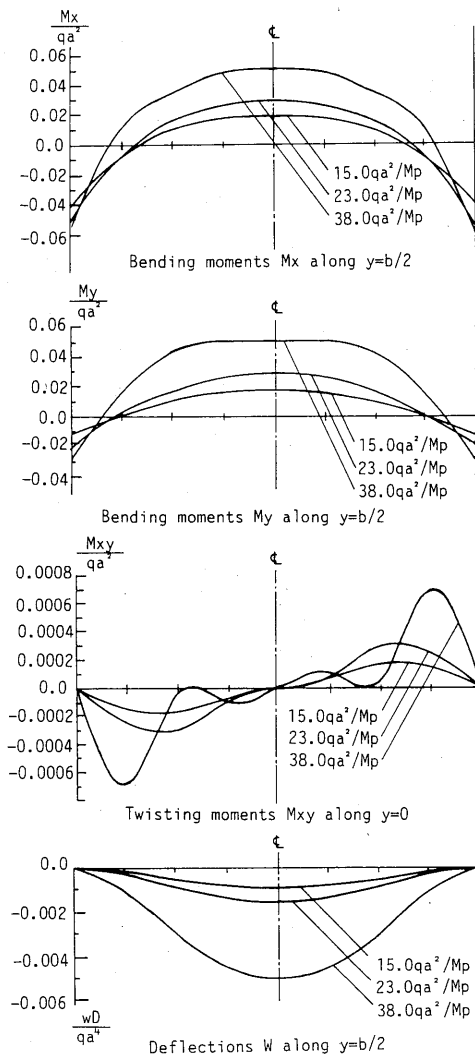


Fig. 8 Typical Moment and Deflection Diagrams for Clamped Square Plate.

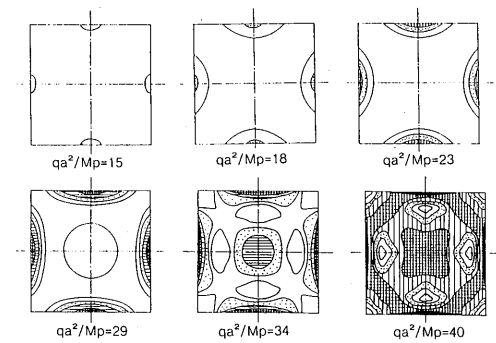


Fig. 9 Progression of Yield Regions (CCCC).

板に等分布荷重が満載される場合の非弾性解析を行った。Fig. 7 は分割数 $m=n=4$ 、板厚方向の分割数 $nz=20$ および増分荷重 $\Delta qa^2/M_p=1.0$ として計算した場合の、中央点のたわみに関する荷重変位曲線を示す。○印で示された値は、Bhaumik, Hanley⁸⁾により差分法を用いて得られた解析結果を示しており、本解析法による数値解析結果は、その数値解と比較的よく一致していることがわかる。また、同図には、塑性設計法により得られる崩壊荷重値 (upper bound = $48.0 qa^2/M_p$, lower bound = $44.3 qa^2/M_p$) も示されている。

Fig. 8 に降伏開始後から断面の一部が全塑性モーメントに達するまでの代表的な荷重段階での $y=0$ 上のねじりモーメント M_{xy} および $y=b/2$ 上の曲げモーメント M_y , M_x の分布は、塑性化が進むにつれて平滑化されていることがわかる。

Fig. 9 は正方形板の4分の1部分を縦横にそれぞれ4等分して計算した場合の代表的な荷重段階での弾塑性状況図を示す。四辺固定正方形板においては、四辺

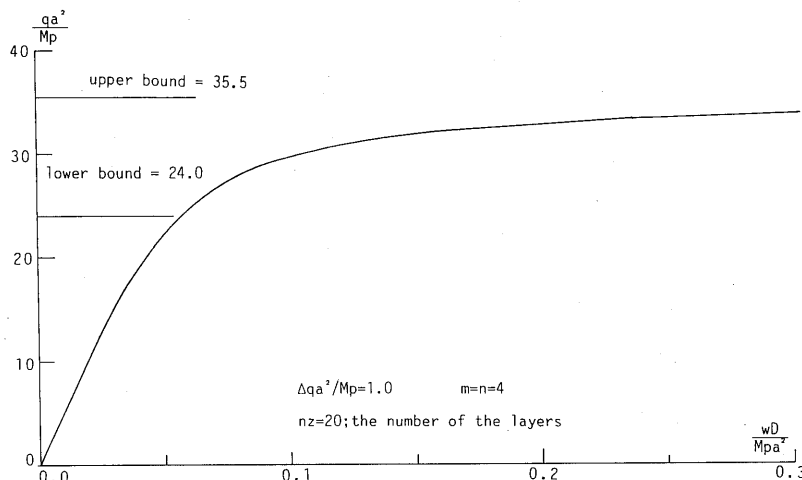


Fig. 10 Load-Deflection Curves for Square Plate with Two Opposite Edges Simply Supported and the Other Two Edges Clamped.

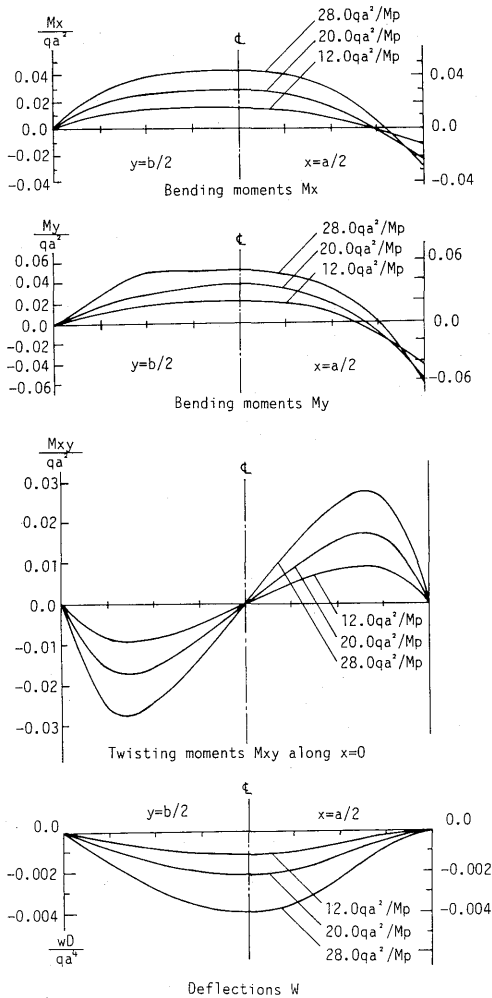


Fig. 11 Moment and Deflection Diagrams for Square Plate with Two Opposite Edges Simply Supported and the Other Two Edges Clamped.

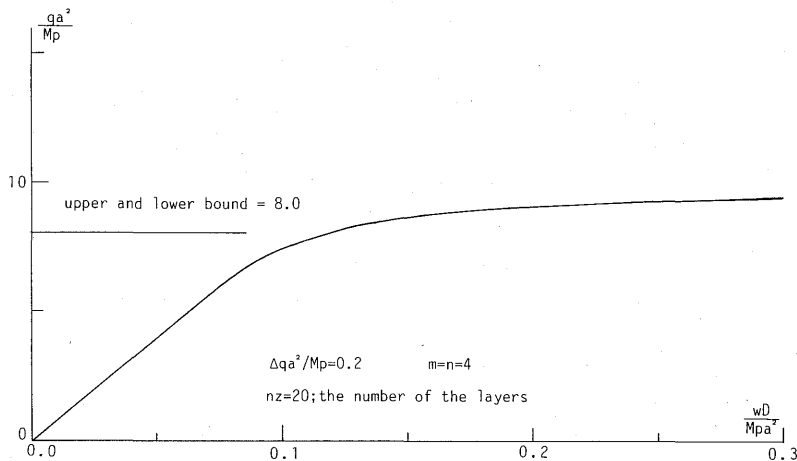


Fig. 13 Load-Deflection Curves for Square Plate with Two Opposite Edges Simply Supported and the Other Two Edges Free.

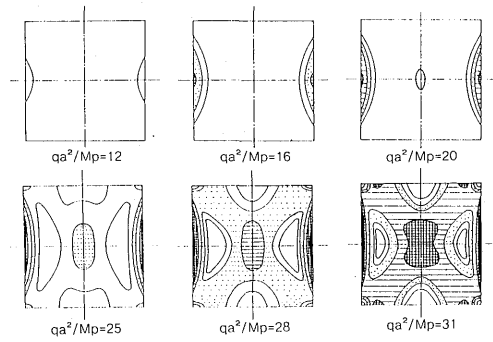


Fig. 12 Progression of Yield Regions (SCSC).

単純支持正方形板の場合と異なり、塑性域はまず境界辺の中央部から拡がり、つづいて中央点からも拡がっていく。この結果は、Ang, Lopez²⁷⁾による計算結果と同様の傾向を示している。

(3) 対辺単純支持他対辺固定正方形板

つぎに、対辺単純支持他対辺固定 (SCSC) なる境界をもつ正方形板に等分布荷重が満載される場合の非弾性解析を行った。Fig. 10 は $m=n=4$ 、板厚方向の分割数 $n_z=20$ および増分荷重 $\Delta qa^2/M_p=1.0$ として計算した場合の、中央点のたわみに関する荷重変位曲線を示す。同図には、塑性設計法により得られる崩壊荷重値 (upper bound = $35.5 qa^2/M_p$, lower bound = $24.0 qa^2/M_p$) も示されており、本解法の数値解は upper bound および lower bound の間に収束している。

Fig. 11 に降伏開始後から断面の一部が全塑性モーメントに達するまでの代表的な荷重段階での、 $y=0$ 上のねじりモーメント M_{xy} および $y=b/2$ 上の曲げモーメント M_y , M_x の分布図を示したものである。同

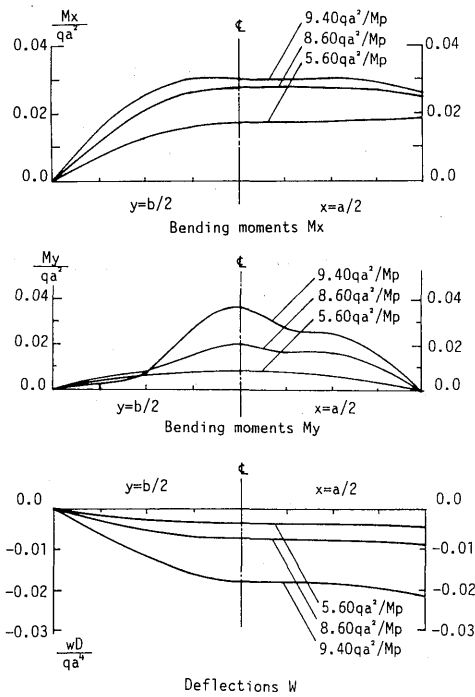


Fig. 14 Moment and Deflection Diagrams for Square Plate with Two Opposite Edges Simply Supported and the Other Two Edges Free.

図においても四辺単純支持板のときと同様に、ねじりモーメント M_{xy} および曲げモーメント M_y , M_x の分布は、塑性化が進むにつれて平滑化されていることがわかる。

Fig. 12 は正方形板の 4 分の 1 部分を縦横にそれぞれ 4 等分して計算した場合の代表的な荷重段階での弾塑性状況図を示す。対辺単純支持他対辺固定正方形板においては、四辺固定正方形板および四辺単純支持正方形板の場合と異なり、塑性域はまず固定辺の中央部から始まり、つぎに中央部、つづいて中央部から隅角点を除く対角線方向に拡がっていく。

(4) 対辺単純支持他対辺自由正方形板

さらに、対辺単純支持他対辺自由 (SFSF) なる境界をもつ正方形板に等分布荷重が満載される場合の非弾性解析を行った。Fig. 13 は分割数 $m=n=4$ 、板厚方向の分割数 $nz=20$ および増分荷重 $\Delta qa^2/M_p=0.2$ として計算した場合の、中央点のたわみに関する荷重変位

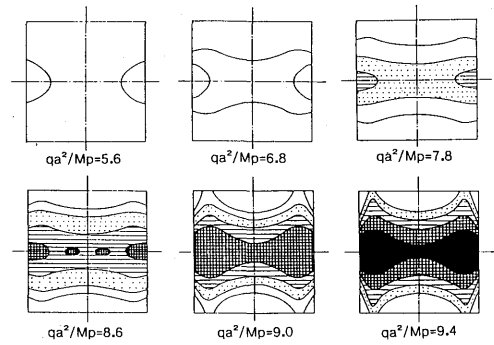


Fig. 15 Progression of Yield Regions (SFSF).

曲線を示す。同図には、塑性設計法により得られる崩壊荷重値 (upper and lower bound $= 8.0 qa^2/M_p$) も示されており、この値より、やや大きめの値に本法による数値解は収束している。

Fig. 14 に降伏開始後から断面の一部が全塑性モーメントに達するまでの代表的な荷重段階での、 $y=0$ 上のねじりモーメント M_{xy} および $y=b/2$ 上の曲げモーメント M_y , M_x の分布図を示したものである。同図においても四辺単純支持板のときと同様に、ねじりモーメント M_{xy} および曲げモーメント M_y , M_x の分布は、塑性化が進むにつれて平滑化されていることがわかる。

Fig. 15 は正方形板の 4 分の 1 部分を縦横にそれぞれ 4 等分して計算した場合の代表的な荷重段階での弾塑性状況図を示す。対辺単純支持他対辺自由正方形板においては、塑性域はまず自由辺の中央部から拡がり、自由辺に垂直な方向に進行してゆく。

7. 結 語

本論文は、先に提示した変厚矩形板の曲げ解法の非弾性曲げ問題への応用性を検証し、種々の境界条件を有する矩形板の非弾性曲げ解析を行ない、その挙動特性を明らかにしたものである。数値解析の結果から、本解析法による数値解は、他解法による数値解によく一致し、また、比較的粗い分割数による解析においても、実用上十分な精度をもつ解が得られることなどが確認され、本解析法の妥当性が検証された。

[Appendix I]

$$[b_{ij}] = [a_{ij}]^{-1}$$

$$a_{ij} = 12 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} a_{ij} \xi^2 d\xi$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} - \frac{1}{d} \begin{bmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}$$

$$a = \sigma'_x + \nu \sigma'_y, \quad b = \nu \sigma'_x + \sigma'_y, \quad c = (1 - \nu) \tau'_{xy}, \quad d = a \sigma'_x + b \sigma'_y + c \tau'_{xy}$$

$$\sigma'_x = (2\sigma_x - \sigma_y)/3\sigma_0, \quad \sigma'_y = (2\sigma_y - \sigma_x)/3\sigma_0, \quad \tau'_{xy} = \tau_{xy}/\sigma_0,$$

σ_0 : 降伏応力

[Appendix II]

$$\begin{aligned} F_{111} &= F_{123} = F_{134} = F_{188} = F_{278} = F_{278} = F_{377} = 1.0 & F_{156} &= a_{22} & F_{256} &= a_{23}\mu & F_{363} &= -I \\ F_{212} &= F_{225} = F_{233} = F_{331} = F_{386} = F_{322} = \mu & F_{157} &= a_{23} & F_{257} &= a_{21}\mu & F_{372} &= -K \\ F_{146} &= a_{12} & F_{246} &= a_{13}\mu & F_{345} &= -I & F_{166} &= a_{32} & F_{266} &= a_{33}\mu & F_{381} &= -\mu K \\ F_{147} &= a_{13} & F_{247} &= a_{11}\mu & F_{354} &= -I & F_{167} &= a_{33} & F_{267} &= a_{31}\mu & \text{Other } F_{ijk} &= 0 \end{aligned}$$

[Appendix III]

$$\begin{aligned} A_{p1} &= \gamma_{p1} \quad A_{p2} = 0 \quad A_{p3} = \gamma_{p2} \quad A_{p4} = \gamma_{p3} \quad A_{p5} = 0 \quad A_{p8} = \gamma_{p8} & \rho_{11} &= \beta_{ii}, \quad \rho_{12} = \mu\beta_{jj}, \quad \rho_{22} = -\mu\beta_{ij}, \quad \rho_{23} = \beta_{ii}, \quad \rho_{25} = \mu\beta_{jj}, \\ A_{p6} &= \gamma_{p4}a_{12} + \gamma_{p5}a_{22} + \gamma_{p6}a_{32} \quad A_{p7} = \gamma_{p4}a_{13} + \gamma_{p5}a_{23} + \gamma_{p6}a_{33} & \rho_{31} &= -\mu\beta_{ij}, \quad \rho_{33} = \mu\beta_{jj}, \quad \rho_{34} = \beta_{ii}, \quad \rho_{45} = -I_{ij}\beta_{ij}, \\ B_{p1} &= 0 \quad B_{p2} = \mu\gamma_{p1} \quad B_{p3} = \mu\gamma_{p3} \quad B_{p4} = 0 \quad B_{p5} = \mu\gamma_{p2} \quad B_{p6} = \gamma_{p7} & \rho_{46} &= a_{12}\beta_{ii} + a_{13}\mu\beta_{jj}, \quad \rho_{47} = a_{11}\mu\beta_{jj} + a_{13}\beta_{ii}, \quad \rho_{54} = -\beta_{ij}I_{ij}, \\ B_{p6} &= (\gamma_{p4}a_{13} + \gamma_{p5}a_{23} + \gamma_{p6}a_{33})\mu \quad B_{p7} = (\gamma_{p4}a_{11} + \gamma_{p5}a_{21} + \gamma_{p6}a_{31})\mu & \rho_{56} &= a_{22}\beta_{ii} + a_{23}\mu\beta_{jj}, \quad \rho_{57} = a_{21}\mu\beta_{jj} + a_{23}\beta_{ii}, \quad \rho_{63} = -\beta_{ij}I_{ij}, \\ C_{p14} &= \gamma_{p3}\mu + \mu\gamma_{p8}K_{46} \quad C_{p24} = \gamma_{p2}\mu + \gamma_{p7}K_{46} \quad C_{p34} = \gamma_{p6}I_{46} & \rho_{66} &= a_{32}\beta_{ii} + a_{33}\mu\beta_{jj}, \quad \rho_{67} = a_{31}\mu\beta_{jj} + a_{33}\beta_{ii}, \quad \rho_{72} = -\beta_{ij}K_{ij}, \\ C_{p44} &= \gamma_{p5}I_{46} \quad C_{p54} = \gamma_{p4}I_{46} \quad C_{p64} = -\mu\gamma_{p8} \quad C_{p74} = -\gamma_{p7} \quad C_{p84} = 0 & \rho_{77} &= \beta_{ij}, \quad \rho_{78} = \mu\beta_{jj}, \quad \rho_{81} = -\mu\beta_{ij}, \quad \rho_{86} = \mu\beta_{ij}, \quad \rho_{88} = \beta_{ii}, \\ [\gamma_{pt}] &= [\rho_{pt}]^{-1} & \beta_{ij} &= \beta_{ii}\beta_{jj} \end{aligned}$$

[Appendix IV]

$$\begin{aligned} a_{pijkt} &= \sum_{s=1}^8 \left\{ A_{ps} \sum_{f=0}^i \beta_{if} [a_{sfoht} - a_{sfjkt}(1 - \delta_{fi})] \right. \\ &\quad + B_{ps} \sum_{g=0}^i \beta_{jg} [a_{soght} - a_{sigkt}(1 - \delta_{gj})] \\ &\quad \left. + \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^i C_{psfg} \beta_{if} \beta_{jg} a_{sfghk}(1 - \delta_{fi}\delta_{gj}) \right\} \\ b_{pijkt} &= \sum_{s=1}^8 \left\{ A_{ps} \sum_{f=0}^i \beta_{if} [b_{sfoht} - b_{sfjkt}(1 - \delta_{fi})] \right. \\ &\quad + B_{ps} \sum_{g=0}^i \beta_{jg} [b_{soght} - b_{sigkt}(1 - \delta_{gj})] \\ &\quad \left. + \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^i C_{psfg} \beta_{if} \beta_{jg} b_{sfghk}(1 - \delta_{fi}\delta_{gj}) \right\} \\ q_{pij} &= \sum_{s=0}^8 \left\{ A_{ps} \sum_{f=0}^i \beta_{if} [q_{sfo} - q_{sfj}(1 - \delta_{fi})] \right. \\ &\quad + B_{ps} \sum_{g=0}^i \beta_{jg} [q_{sog} - q_{sig}(1 - \delta_{gj})] \\ &\quad + \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^i C_{psfg} \beta_{if} \beta_{jg} q_{sfgh} (1 - \delta_{fi}\delta_{gj}) \\ &\quad \left. - A_{p1} \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^i \beta_{if} \beta_{jg} q_{fgh} \right\} \\ b_{5ioo3} &= \frac{1}{t_{11}(i, o)} \frac{D_{oo}}{D_{io}} a_i & a_{40jo3} &= \frac{1}{t_{22}(o, j)} \frac{D_{oo}}{D_{oj}} a_j & a_{10jo1} &= \frac{x_{oo}}{x_{oj}} a_j, \quad b_{10je4} = \frac{1}{x_{oj}} \beta_{je}, \quad b_{10je6} = \frac{1}{\mu x_{oj}} \gamma_{je} \\ a_{5iok3} &= -\frac{t_{12}(k, o)}{t_{11}(i, o)} \frac{D_{ko}}{D_{io}} \beta_{ik} & b_{40je3} &= -\frac{t_{21}(o, \ell)}{t_{22}(o, j)} \frac{D_{oe}}{D_{oj}} \beta_{je} & b_{2ioo1} &= \frac{x_{oo}}{x_{io}} a_i, \quad a_{2ioh5} = \frac{1}{x_{io}} \beta_{ih}, \quad a_{2ioh6} = \frac{1}{x_{io}} \gamma_{ih} \\ a_{5ioh2} &= -\frac{t_{13}(k, o)}{t_{11}(i, o)} \frac{D_{ko}}{D_{io}} \beta_{ik} & b_{40je2} &= -\frac{t_{23}(o, \ell)}{t_{22}(o, j)} \frac{D_{oe}}{D_{oj}} \beta_{je} & \text{ここに, } [t_{ij}] &= [a_{ij}]^{-1} \\ a_{5ioh5} &= \frac{1}{(1 - \nu^2) D_{11} t_{11}(i, o)} \gamma_{ih} & b_{40je4} &= \frac{1}{(1 - \nu^2) D_{1j} t_{22}(o, j)} \gamma_{je} \end{aligned}$$

参考文献

- 1) 例えば, P. G. Hodge 著, 倉西正嗣訳: 構造物の塑性解析, コロナ社.
- 2) 谷資信編著: 建築物の構造解析シリーズIII板構造の解析, 技報堂, 1976.
- 3) 堀田佳克: 塑性関節線を用いた板の有限要素解析, 第17回構造強度に関する講演会論文, 機械学会, 航

空宇宙学会, pp. 157-160, 1975.

- 4) 小松定夫, 北田俊行, 宮崎清司: 残留応力および初期たわみを有する圧縮板の弾塑性解析, 土木学会論文報告集, 第244号, pp. 1-4, 1975.
- 5) Ohga, M., T. Shigematsu and T. Hara: A Combined Finite Element-Transfer Matrix Method, Proc. ASCE, Vol. 110, No. EM9, pp. 1335

—1349, 1984.

- 6) Owen, D. R. J. and E. Hinton : Finite Elements in Plasticity, Pineridge Press Limited, Swansea, U. K. pp. 319—373, 1980.
- 7) Ang, A. H. S. and L. A. Lopez : Discrete Model Analysis of Elastic-Plastic Plate, Proc. ASCE, Vol. 94, No. EM1, pp. 271—293, 1968.
- 8) Bhaumik, A. K. and J. T. Hanley : Elasto-Plastic Plate Analysis by Finite Differences, Proc. ASCE, Vol. 93, No. ST5, pp. 279—295, 1967.
- 9) Yokoo, Y., T. Nakamura and T. Mori : Numerical Analysis of Elastic-Plastic Deformation of Simply Supported Rectangular Plates, Transaction of A. I. J. No. 152, pp. 27—36, 1968.
- 10) May, G. W. and K. H. Gerstle : Elastic-Plastic Bending of Rectangular Plates, Proc. ASCE, Vol. 97, No. ST7, pp. 1863—1878, 1971.
- 11) 山田嘉昭：マトリックス法材料力学，日本鋼構造協会編，倍風館。
- 12) 崎山毅，松田浩：変厚矩形板の曲げの一解析法，土木学会論文報告集，第338号，pp. 21—28, 1983.
- 13) 太田俊昭著：構造物の非弾性解析（新体系土木工学8），技報堂，1980.